

Sesión Sucesiones y Sumas CO+

Antonio Medinilla, Pablo Puerto y David Ramos

4 noviembre 2022

Ejercicio 1. Demuestra que para todo n entero positivo se tiene

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

Ejercicio 2 (OME 2007). Sean a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 cinco números positivos en progresión aritmética de diferencia d . Probar que

$$a_2^3 \leq \frac{1}{10}(a_0^3 + 4a_1^3 + 4a_3^3 + a_4^3).$$

Ejercicio 3 (OME 1965). Determinar una progresión geométrica de 7 términos, sabiendo que la suma de los tres primeros es 7 y la suma de los tres últimos es 112.

Ejercicio 4 (OME 2009). Hallar todas las sucesiones finitas a_1, a_2, \dots, a_n de n números naturales consecutivos tales que $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2009$

Ejercicio 5. Sean n un entero positivo. Calcular la siguiente suma:

$$\frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{n+2}{n \cdot (n+1) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}$$

Ejercicio 6 (OME 1988). Sea $(F_n)_{n \geq 1}$ la sucesión definida por

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Expresa F_{2n} en función de F_{n-1}, F_n y F_{n+1} .

Ejercicio 7. Encontrar el término general de estas sucesiones definidas por recurrencia:

$$a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 3^n, n \geq 0; a_0 = 0, a_1 = 1. \quad (1)$$

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}, n \geq 1; a_0 = 2, a_1 = 3. \quad (2)$$

Ejercicio 8. Se da una lista de números enteros a_1, a_2, \dots, a_n con n impar. De esa lista se obtiene una nueva lista:

$$\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \dots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}, \frac{a_n + a_1}{2}$$

De esta lista, por la misma regla resulta la próxima, y así sucesivamente. Demuestre que si todos los números que se obtienen en cada paso son enteros, entonces los números iniciales eran todos iguales entre sí

Ejercicio 9 (OME 2012). Una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ se define mediante la recurrencia

$$a_1 = 1, a_2 = 5, a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 4}{a_{n-2}} \text{ para } n \geq 3$$

Demostrar que todos los términos de la sucesión son enteros y encontrar una fórmula explícita para a_n .

Ejercicio 10. Sea $(a_n)_{n \geq 0}$ una sucesión definida por la recurrencia

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

¿Se puede definir a_0 para que a_n sea primo para todo $n \geq 1$?